

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ ¹

© А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

Методы выпуклого анализа [1, 2] и дифференциальной геометрии [3] привлечены для изучения свойств α -множеств [4, 5]. Конструкции теории α -множеств применяются в качестве инструментов исследования задач теории управления и теории дифференциальных игр [6, 7]. Введенные в работе понятия биссектрисы множества и псевдовершины кривой представляют самостоятельный интерес, позволяя исследовать геометрию множеств, вычислять их меру невыпуклости. Эти понятия также оказываются полезными при изучении эволюции множеств достижимости управляемых систем, построении волновых фронтов [8, 9], вычислении эйконала в геометрической оптике [10, 11]. В работе развивается численно-аналитический подход к отысканию псевдовершин кривой, вычислению меры невыпуклости плоского множества и построению на их основе фронтов. Конструируется точное решение одной задачи быстрого действия.

П р и м е р. Рассматривается задача Коши-Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

Краевое условие определено на кривой Γ — границе некоторой области $M \subset \mathbb{R}^2$. Источник волны распределен равномерно вдоль гладкой кривой Γ , эйконал $u = u(x, y)$ на этой кривой равен нулю.

Минимаксное решение рассматриваемой задачи является функцией оптимального результата в задаче быстрого действия для соответствующей динамической системы с простыми движениями.

Разрабатываемый авторами подход к исследованию невыпуклых множеств и построению волновых фронтов позволяет в ряде случаев находить эйконал аналитическими методами на основе биссектрис, что, в свою очередь, позволяет находить функцию оптимального результата для соответствующей задачи быстрого действия.

В качестве целевого множества M для задачи быстрого действия здесь рассматривается подграфик функции $y = x^2$. Нахождение точного решения $u = u(x, y)$ сводится к классической задаче математического программирования. Минимаксное решение имеет вид:

$$u(x, y) = \sqrt{(x - P(x, y))^2 + (y - P(x, y)^2)^2},$$

где

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00601), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-8512.2006.1) и программы научного сотрудничества с СО РАН.

$$P(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{(2y-1)^3}{216}}} + \sqrt[3]{\frac{x}{4} - \sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{(2y-1)^3}{216}}}, & y > x^2, y \leq 0.5 + 0.5\sqrt[3]{13.5x^2} \\ -\frac{(2y-1)}{3} \cos \frac{\arccos \frac{-3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, & x \leq 0, y > x^2, y > 0.5 + 0.5\sqrt[3]{13.5x^2} \\ \frac{(2y-1)}{3} \cos \frac{\arccos \frac{3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, & x > 0, y > x^2, y > 0.5 + 0.5\sqrt[3]{13.5x^2} \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
2. Экланд И., Тетам. Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
3. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 300 с.
4. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α -множества и их свойства // Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543-В2004.
5. Успенский А.А. Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. 21 с. Деп. в ВИНТИ 07.02.07, № 104-В2007.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
8. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
9. Лебедев П.Д., Успенский А.А. К вопросу о геометрии волновых фронтов // Известия Института математики и информатики. Ижевск: УдГУ, 2006. Вып. 3(37). С. 79–80.
10. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. Издательство Академии наук СССР, 1946. 332 с.
11. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала, I. Матем. сб. Т. 98. Вып. 3. С. 450–49.

Успенский Александр Александрович
Институт математики и
механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич
Институт математики и
механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: pleb@yandex.ru

Поступила в редакцию 30 апреля 2007 г.